# Mehr Papierfalten braucht das Land

Dmitri Nedrenco

Auf der diesjährigen GDM-Jahrestagung in Heidelberg habe ich wieder enttäuscht festgestellt, wie gering die Rolle des mathematischen Papierfaltens im deutschsprachigen Mathematikunterricht zu sein scheint; gerade zwei Beiträge gab es auf der Tagung zu dem Thema.

Meines Wissens ist Origami sowie dessen Rolle und Auswirkung auf die Leistungen von Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht nur selten Gegenstand der Forschung in Deutschland gewesen.[1] Zwar setzen viele mir bekannte Mathematiklehrerinnen und -lehrer Origami im Unterricht hin und wieder ein, jedoch gibt es wenig wissenschaftliche Arbeiten zum Nutzen oder zur Methodik eines solchen Einsatzes.

Es wäre schön, wenn mehr Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler dieses spannende Gebiet in ihre Überlegungen einbeziehen würden. Etwa in Israel wird am Israeli Origami Center seit mehr als 20 Jahren an diesem Thema geforscht – und die Ergebnisse dieser Forschung sind dort bereits in vielen Schulen eingesetzt worden (vgl. Golan und Jackson, 2009).

Nicht wenige kennen das Buch »Origami und Mathematik« von Herrn Jürgen Flachsmeyer (2008). Ferner widmete »Der Mathematikunterricht« 2009 ein ganzes Heft der Origamimathematik (Flachsmeyer, 2009). Trotzdem konnte Papierfalten bisher keine tieferen Wurzeln im Mathematikunterricht[2] bzw. in der mathematikdidaktischen Forschung schlagen. Ich glaube das könnte in erster Linie daran liegen, dass die meisten vorgelegten Bücher, Essays und Arbeitsblätter vor allem an einer (schönen) Veranschaulichung bekannter mathematischer Tatsachen oder interessanter Körper interessiert waren. Zum anderen ist es bisher nicht gelungen (oder besser: nicht versucht worden), eine systematische Behandlung des mathematischen Papierfaltens für den Mathematikunterricht vorzulegen. Die Arbeitsblätter in „Papierfalten im Mathematikunterricht 5 bis 12“ (Schmitt-Hartmann und Herget, 2013) deuten eine systematische Aufarbeitung des Themas für die Schule an, die angegebenen Arbeitsblätter sind jedoch thematisch nicht zusammenhängend und zeigen exemplarisch Möglichkeiten

[1] Man muss natürlich erwähnen, dass Jürgen Flachsmeyer, Bernd Wollring, Hans-Wolfgang Henn, Hans Walser, Michael Schmitz (um nur einige Namen zu nennen) zu dem Thema Origami und seinem Einsatz im Mathematikunterricht publiziert haben.

[2] Man muss auch sagen, dass die Spannweite des mathematischen Papierfaltens alle Schulformen und Jahrgangsstufen erfasst und sogar auf universitärem Niveau sinnvoll eingesetzt werden kann.

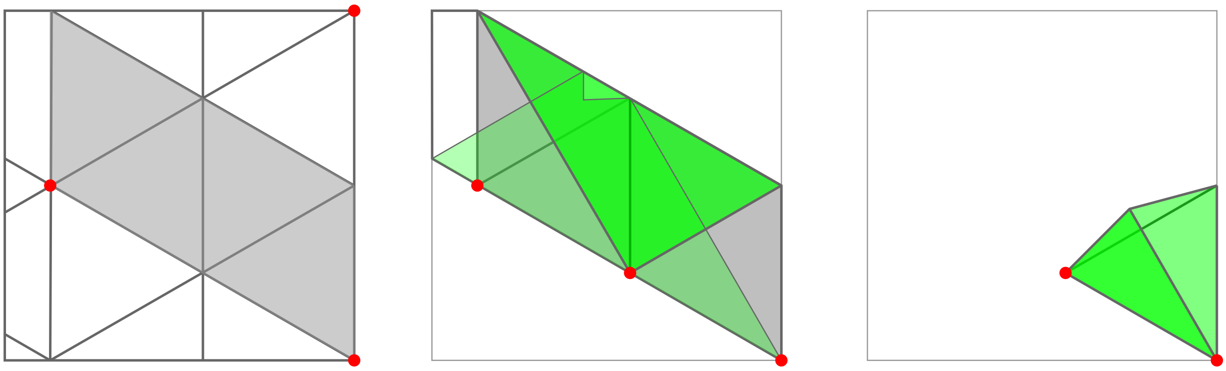

Abbildung 1. Links: Ein Faltmuster des regelmäßigen Tetraeders; die Referenzpunkte deuten ein regelmäßiges Dreieck an. Mitte: Das beinahe gefaltete Tetreder sowie die aktuelle Position der Punkte; Rechts: Das fertige Tetraeder. (Nach Montroll, 2009, pp. 65–66)

des Einsatzes bei verschiedenen Unterrichtsthemen auf.

Letztlich wurde noch keine regelgeleitete Behandlung der Theorie des Papierfaltens im Mathematikunterricht entwickelt: Mal faltet man ein Stück Papier, mal mehrere; mal schneidet man, mal ist das verboten; mal faltet man approximativ, mal verlangt man mathematische Exaktheit. Die Theorie muss systematisiert werden und es müssen klare Regeln aufgestellt werden, um die für Schülerinnen und Schüler ansprechenden Figuren (und vielmehr ihre Konstruktionen) auch mathematisch beschreiben zu können.

Doch was ist am Origami so faszinierend? Was bedeutet *Origami* überhaupt?

*Origami* ist japanisch für *Papierfalten*. Mathematisches Papierfalten kann mindestens zweierlei bedeuten: Falten von Papier bestimmten Regeln folgend oder Designen (und Falten) von bestimmten Figuren (Kranich, Ikosaeder, Mittelsenkrechte). Zwar ist das Falten eines Kranichs in der Regel nicht mehr als ein – zum Teil – anspruchsvolles Folgen einer Bauanleitung. Doch das Designen, *Modellieren* eines Faltmusters, aus dem ein Kranich entsteht, bedarf einer tiefergehenden mathematischen Planung Hull, 2005. Die meisten Menschen empfinden Origami als eine heitere Kinderbeschäftigung. Dies entsprach im Wesentlichen auch der Wahrheit bis vor etwa 100 Jahren.[3] Doch inzwischen steckt viel Mathematik in diesem ehemals harmlosen Zeitvertreib; dies sollten wir für den Mathematikunterricht konstruktiv nutzen!

Mathematisches Papierfalten kann man etwa so sehen: Ein Quadrat Papier ist ein Teil der Ebene, das darf ich so falten, dass ich Ecken aufeinander oder auf Quadratseiten, oder Quadratseiten aufeinander falte; dabei entstehen Mittelsenkrechten, Verbindungsgeraden, Parabeltangenten, Winkelhalbierenden – eine ganze Reihe geometrisch interessanter Objekte! Das Papier wird entfaltet und ich darf so weitermachen, dass ich zusätzlich bereits gefaltete Falze mitverwende, vgl. Abbildung 2. Einfach gesagt, ich darf das Papier einmal falten, dann auffalten, dann wieder (etwa an einem anderen Falz) falten. Man fragt sich schnell: Was erfalte ich mir auf diese Weise – alle Punkte, die ich auch mit Zirkel und Lineal konstruieren kann? Ja! Und noch mehr. Gar das Delische Problem[4] kann exakt gelöst werden.

Das ist nur eine Möglichkeit, Papierfalten zu »mathematisieren«, Regeln einzuführen. Nun wird es spannend, sich zu überlegen, was man alles auf diesem Wege konstruieren kann. Kann man etwa eine Strecke exakt dritteln? Fünfteln? Ein regelmäßiges Siebeneck falten? Ein regelmäßiges Neuneck? Solche Fragen kann man zielgerichtet systematisch untersuchen, Parallelen zu Konstruktionen mit üblichen Werkzeugen aufdecken und dabei noch mit einfachen Mitteln interessante Figuren erschaffen.

Viele der in den KMK-Standards festgelegten Ziele für den Mathematikunterricht können auf eine natürliche und motivierende Weise durch Papierfalten angestrebt werden; ich will versuchen, einige davon direkt auf Origami zu übertragen und mögliche Fragestellungen generieren.

[3] Das erste tiefergehende Buch über geometrisches Papierfalten erschien 1893 in Madras, Indien von Sundara Rao (1893).
[4] Man konstruiere $\sqrt[3]{2}$.

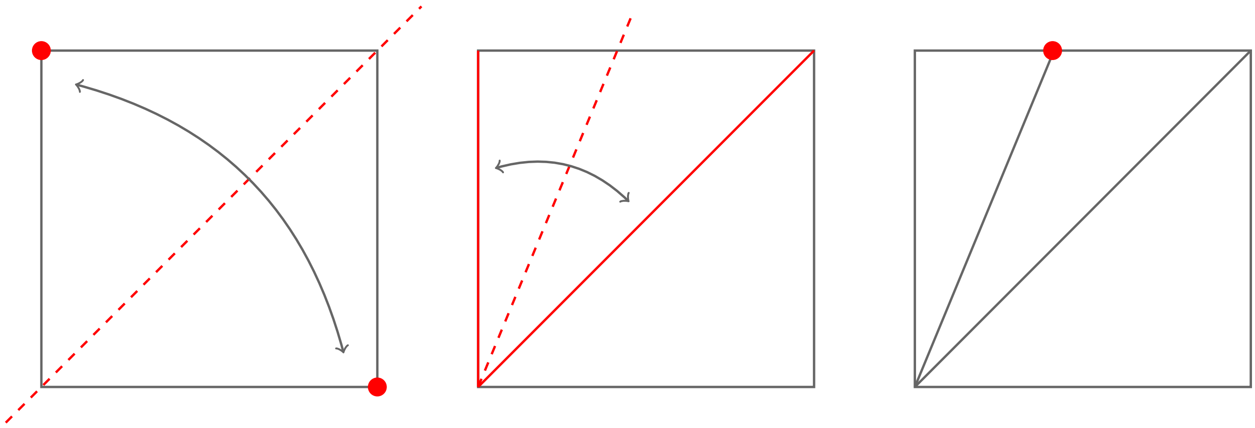

Abbildung 2. Links: Falten der Mittelsenkrechten beider markierter Punkte; Mitte: Falten der Winkelhalbierenden der markierten Geraden; Rechts: Als Resultat – ein neuer konstruierter (Schnitt)punkt.

*Modellieren*
Die Grundfrage des Origami: Wie kann ich eine Figur (Elefant, Dodekaeder, ein Plus-Zeichen) falten? Wie designe ich ein Faltmuster, das die richtige Figur ergibt? Dazu gibt es inzwischen wirkungsvolle Computerprogramme wie TreeMaker (Lang, o. J.). Das Thema kann von besonders einfach (Man falte eine Schachtel, eine Geschenkverpackung, ein Kuvert) zu besonders anspruchsvoll (Man entwickle ein Computerprogramm, das das nötige Faltmuster ergibt) variieren.

Eine auf der Hand liegende Fragestellung für die Didaktik wäre etwa: *Verbessert sich das räumliche Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler durch einen solchen Zugang zu geometrischen Objekten? Oder konkreter: Schneiden Schülerinnen und Schüler in standardisierten Tests zum räumlichen Vorstellungsvermögen besser ab, als solche, die keinen Kontakt zum Falten hatten? (vgl. Boakes, 2009, Boakes, 2011).*

*Beweisen lernen*
Wenn ich etwas gefaltet habe (ein Dreieck, ein Drittel eines Winkels, einen Würfel), wie kann ich begründen, dass das Objekt wirklich das Gewünschte ist und nicht nur grob und ungefähr dieses Objekt wiedergibt? Wie beweise ich das? (Etwa mit Ähnlichkeitssätzen, der Euklid-Maschinerie, wenn man so will, mit dem Starrheitssatz von Cauchy, etc.).

Ich behaupte, dass nur bestimmte Faltmuster (2-färbbare![5]) flachgefaltet werden können – warum ist das so und wie begründet man das? (vgl. Hull, 2013, Ch. 21–22, Nedrenco und Beck, 2016).

*Profitieren Kinder davon, dass sie selber Fragen des Papierfaltens entwickeln und beweisen? Kann diese Beschäftigung zum besseren Verständnis von Beweisen beitragen?*

*Konstruieren*
Die klassische Frage der Geometrie: Wie dreiteile ich einen gegebenen Winkel? Oder: Wie konstruiere ich ein Objekt mittels gegebener Werkzeuge? Mit Papier kann man das Delische Problem exakt lösen, man kann mehr regelmäßige Polygone konstruieren, als mit Zirkel und Lineal; man kann Lösungen von quadratischen wie kubischen Gleichungen vorfalten.

*Können Schülerinnen und Schüler solche Konstruktionen besser verinnerlichen, wenn sie sie gefaltet haben, als wenn sie zusätzliche Instrumente verwenden (Zirkel, markiertes Lineal, Ellipsenwerkzeuge, etc.)?*

*Visualisieren*
Falte ich einige Körper bzw. Objekte (Tetraeder vgl. Abbildung 1, Fünfecke, Rhombendodekaeder, Mittelsenkrechten), dann kann ich sie in der Hand drehen und analysieren.

*Kann ein solcher Zugang hilfreich sein? Profitieren Schülerinnen und Schüler von einem solchen Zugang zu 3D-Objekten mehr als von einem Zugang zum Thema über digitale Medien, etwa GeoGebra und Ähnliches?*

*Kommunizieren*
Faltet man interessante und motivierende Objekte (etwa ein Oktaeder aus einem Stück Papier, ohne Schneiden und Kleben!), so bedarf es fortgeschrittener motorischer Fähigkeiten. Oft gelingt

[5] Das heißt solche, deren Flächen man mit zwei Farben färben kann, ohne dass die „Nachbarländer“ die gleiche Farbe bekommen.

die Faltung nicht auf Anhieb, dann schaut man zum Nachbarn hinüber, lässt sich erklären in welche Tasche genau die trotzige Lasche gehen muss (motorische Fähigkeiten!), versucht es erneut und endlich hat man es geschafft!
*Verbessern gemeinsame (mathematische) Faltübungen Kommunikationskompetenzen der Schülerinnen und Schüler?*

Es gibt viele spannende Fragen, die zu untersuchen sich lohnen könnte (vgl. Boakes, 2009, Boakes, 2011, Arici und Aslan-Tutak, 2013, Golan und Jackson, 2009, Arslan, 2012 für Fragen, die bereits gestellt und teilweise beantwortet wurden).

Meine Untersuchungen zu diesem Thema betreffen Universitätsmathematik und Lehramtsstudenten sowie den Einfluss des Papierfaltens auf Fragen, die mit axiomatischem Denken verknüpft sind.

*Literatur*

Arici, S. & Aslan-Tutak, F. (2013). The effect of Origami-based instruction on spatial visualization, geometry achievement, and geometric reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *13*(1), 179–200.

Arslan, O. (2012). Investigating beliefs and perceived self-efficacy beliefs of prospective elementary mathematics teachers towards using origami in mathematics education (Doctoral dissertation, Middle East Technical University). Zugriff unter http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.633.122&rep=rep1&type=pdf

Boakes, N. (2009). The Impact of Origami-mathematics lessons on achievement and spatial ability of middle school students. In R. J. Lang (Hrsg.), *Origami 4* (S. 471–482). Natick Mass. (USA): AK Peters.

Boakes, N. (2011). Origami and Spatial Thinking of College-Age Students. In P. Wang-Iverson, R. J. Lang, & M. Yim (Hrsg.), *Origami 5* (S. 173–188). Boca Raton: CRC Press.

Flachsmeyer, J. (2008). *Origami und Mathematik: Papier falten – Formen gestalten*. Berliner Studienreihe zur Mathematik. Lemgo: Heldermann.

Flachsmeyer, J. (Hrsg.). (2009). *Mathematik und Origami*. Der Mathematikunterricht.

Golan, M. & Jackson, P. (2009). Origametria: A program to teach geometry and to develop learning skills using the art of origami. In R. J. Lang (Hrsg.), *Origami 4* (S. 459–470). Natick Mass. (USA): AK Peters.

Hull, T. (2005). Review of: Origami Design Secrets by Robert Lang. *The Mathematical Intelligencer*, *27*(2), 92–95.

Hull, T. (2013). *Project origami: Activities for exploring mathematics* (2. ed.). Boca Raton, FL: CRC Press.

Lang, R. (o. J.). Treemaker. Zugriff unter http://langorigami.com/article/treemaker

Montroll, J. (2009). *Origami polyhedra design*. Natick, Mass: A K Peters.

Nedrenco, D. & Beck, J. (2016). *Flachfaltbarkeit: Mathematik mit eigenen Händen schaffen*. Institut für Mathematik.

Schmitt-Hartmann, R. & Herget, W. (2013). *Moderner Unterricht: Papierfalten im Mathematikunterricht ; 5–12* (1. Aufl.). Moderner Unterricht. Stuttgart: Klett.

Sundara Rao, T. (1893). *Geometrical exercises in paper folding*. Madras: Printed by Addison.

Dmitri Nedrenco, Emil-Fischer-Straße 30,
97074 Würzburg,
Email: dmitri.nedrenco@mathematik.uni-wuerzburg.de